# Problemes

Poques respostes hem obtingut als problemes proposats en el *Notícies* 10. Potser el A35 era una mica difícil, però el A33 era molt assequible! El A34 té una solució analítica senzilla, però hem de reconèixer que una solució sintètica elegant no sembla fàcil d'obtenir. La que donem aquí és, podríem dir-ne, algebraica.

Com sempre, preguem als nostres lectors que si fan servir Tex o Latex per escriure les seves solucions, les enviïn per correu electrònic a l'adreça:

`pelegri.viader@econ.upf.es`

així com qualsevol proposta o suggeriment.

## Problemes proposats

En els problemes proposats, encetem una nova sèrie, la **B**. La intenció que teníem era que la lletra **A** identifiqués problemes de tipus «olimpíada», per dir-ho d'alguna manera, i la sèrie **B** fossin problemes que requerissin eines més sofisticades. Fins ara no havíem rebut cap proposta catalogable en aquesta sèrie, i encoratgem a tothom que ens n'enviï més!

**A40.** (Proposat per Edgar Güeto, UPC.) Considerem la successió: $a_n - a_{n-1} = (a_{n-1} - 1)^2$, $a_1 = 2$. Trobeu $S = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots$

**A41.** (Proposat per Edgar Güeto, UPC.) Sigui $T = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, $k \geq 1$, un conjunt finit de naturals $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$. Proveu que existeix $n \in N$ tal que $\forall a \in T$, $\exists b \in T$ tal que $ab = n$ si, i només si, $\forall \alpha \in R$ es compleix:

$$\left(\frac{d_1 + \cdots + d_k}{1/d_1 + \cdots + 1/d_k}\right)^{\alpha} = \frac{d_1^{\alpha} + \cdots + d_k^{\alpha}}{1/d_1^{\alpha} + \cdots + 1/d_k^{\alpha}}.$$

**B42.** (Proposat per Anton Montes, UPC.) Sigui $G$ un grup i $H$ un subgrup de $G$. Sigui $x \in G$.

a) Demostreu que

$$(\forall x,\ xHx^{-1} \subset H) \ \Rightarrow\ (\forall x,\ xHx^{-1} = H).$$

b) Demostreu que per a tot grup finit, si $x$ és un element particular de $G$, es té la proposició següent (que anomenarem $p$):

$$xHx^{-1} \subset H \ \Rightarrow\ xHx^{-1} = H.$$

c) En el cas general que el grup $G$ sigui d'ordre infinit, hi ha tres possibilitats per a la proposició $p$ anterior:

i. la proposició $p$ és certa per a tot grup $G$,

ii. la proposició $p$ no és certa,

iii. la proposició $p$ no es pot decidir.

Quina possibilitat és la correcta?

# Solucions

### Problemes proposats a SCM/Notícies 10

**A33.** (Proposat per Jaume Paradís, UPF.) En Joan té un dau de sis cares numerades de l'1 al 6. Proposa a l'Anna el següent joc: 1) L'Anna tria un nombre i es llença el dau. En Joan paga a l'Anna tants euros com el valor absolut de la diferència entre la puntuació obtinguda i la triada per l'Anna. 2) L'Anna torna a triar un nombre i paga a en Joan amb el mateix criteri que abans. En Joan té la possibilitat d'assignar probabilitats a les cares del dau de la manera que desitgi. Com ho ha de fer en Joan perquè el joc tingui esperança 0?

**Solució:** (A. Gomà, de l'IES Joanot Martorell.). Si anomenem $p_1, \ldots, p_6$ les probabilitats de cada cara, el guany esperat per l'Anna en la primera part del joc és:

1) Triant la cara marcada amb un 1:

$$g_1 = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 3 \cdot p_4 + 4 \cdot p_5 + 5 \cdot p_6.$$

2) Triant la cara marcada amb un 2:

$$g_2 = 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 3 \cdot p_5 + 4 \cdot p_6.$$

3) Triant la cara marcada amb un 3:

$$g_3 = 2 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_4 + 2 \cdot p_5 + 3 \cdot p_6.$$

4) Triant la cara marcada amb un 4:

$$g_4 = 3 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 + 1 \cdot p_5 + 2 \cdot p_6.$$

5) Triant la cara marcada amb un 5:

$$g_5 = 4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 + 1 \cdot p_6.$$

6) Triant la cara marcada amb un 6:

$$g_6 = 5 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 1 \cdot p_5.$$

Òbviament, aquests també són els guanys esperats pel Joan després d'una nova tria per part de l'Anna, de manera que si vol no perdre-hi diners, ha de procurar que $g_1 = g_2 = \cdots = g_6$. El Joan es planteja doncs el sistema següent:

$$\begin{cases} 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 3 \cdot p_4 + 4 \cdot p_5 + 5 \cdot p_6 & = g \\ 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 3 \cdot p_5 + 4 \cdot p_6 & = g \\ 2 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_4 + 2 \cdot p_5 + 3 \cdot p_6 & = g \\ 3 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 + 1 \cdot p_5 + 2 \cdot p_6 & = g \\ 4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 + 1 \cdot p_6 & = g \\ 5 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 1 \cdot p_5 & = g \end{cases}$$

que té com a solució:

$$p_1 = g/5;\ p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0;\ p_6 = g/5.$$

Imposant $p_1 + \cdots + p_6 = 1$, obtenim g=5/2 i

$$p_1 = 1/2;\ p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0;\ p_6 = 1/2.$$

**A34.** (Proposat per Ramón González, de l'IES Pere Calders.) Siguin $A, B, C$ els vèrtexs d'un triangle qualsevol. Demostreu que l'incentre $I$ és

$$I = \frac{A|BC| + B|CA| + C|AB|}{|AB| + |BC| + |CA|}.$$

**Solució:** (A. Gomà, de l'IES Joanot Martorell). Farem servir la notació de l'enunciat, és a dir, que identificarem cada punt $X$ amb el seu vector de posició $\overrightarrow{OX}$.

Farem servir també que la bisectriu de l'angle determinat pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ té com a un dels seus vectors directors $\vec{u'} + \vec{v'}$ essent $\vec{u'}$ i $\vec{v'}$ dos vectors del mateix mòdul, el primer en la mateixa direcció (i el mateix sentit si volem la bisectriu interior) de $\vec{u}$ i el segon en la de $\vec{v}$.

Com que $|AC|\overrightarrow{AB}$ i $|AB|\overrightarrow{AC}$ són dos vectors que compleixen la condició anterior, l'equació de la bisectriu interior de l'angle $\angle A$ del triangle és:

$$X = A + \alpha(|AB|\overrightarrow{AC} + |AC|\overrightarrow{AB})$$

i, semblantment, les altres dues bisectrius interiors tenen com a equacions:

$$X = B + \beta(|BC|\overrightarrow{BA} + |BA|\overrightarrow{BC})$$

i

$$X = C + \gamma(|CA|\overrightarrow{CB} + |CB|\overrightarrow{CA}).$$

Si posem $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{|AB|+|AC|+|BC|}$ i tenim en compte que, naturalment, $|AB| = |BA|$ (i semblantment amb els altres costats del triangle) i que $\overrightarrow{AC} = C - A$ (i semblantment amb els altres costats del triangle), arribem a la conclusió que $I$ és un punt de totes tres bisectrius; és, doncs, l'incentre.

*Hem rebut també la mateixa solució de Ramon González, de l'IES Pere Calders.*

**A35.** (Proposat per Ramón González, de l'IES Pere Calders.) Demostreu que la raó doble $r$ de quatre punts $A, B, C, D$ d'una cònica és igual al quocient dels sinus de la meitat dels angles focals:

$$r = \frac{\sin\frac{AFC}{2}\sin\frac{BFD}{2}}{\sin\frac{AFD}{2}\sin\frac{BFC}{2}}.$$

**Solució:** (Solució de Ramon González, de l'IES Pere Calders.). L'equació focal d'una cònica és:

$$r = \frac{r_0(1+\epsilon)}{1+\epsilon\cos\alpha}$$

on $\epsilon =$ excentricitat i $r =$ distància d'un punt de la cònica al focus $F$.

Observem que, per exemple, en el cas de la hipèrbola la branca focal està descrita per

$$-\arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) < \alpha_1 < \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)$$

i la branca no focal (amb $r$ negatiu) per

$$\arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) < \alpha_2 < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Aquest fet és important per a la validesa general del teorema dels angles meitat.

Tornant al cas general, si col·loquem el focus en l'origen de coordenades i l'eix d'abscisses coincideix amb l'eix principal de simetria, aleshores podem reescriure l'equació focal en forma vectorial

$$\overrightarrow{FA} = \frac{r_0(1+\epsilon)}{1+\epsilon\cos\alpha}(\vec{e_1}\cos\alpha + \vec{e_2}\sin\alpha).$$

Si definim el producte exterior *real* dels vectors $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ per

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

la raó doble per punts sobre una cònica pot escriure's com

$$\{X, ABCD\} = \frac{(\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC})\,(\overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XD})}{(\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XD})\,(\overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XC})}$$

(consulteu per exemple l'article de R. González, J. Homs i J. Solsona al Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques núm. 12, 1 (1997), 51–71.)

Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ són els angles focals dels punts $A, B, C, D, X$ respectivament, llavors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XA} &= \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FX} = \\ &= \frac{r_0(1+\epsilon)}{(1+\epsilon\cos\alpha)(1+\epsilon\cos\xi)}\Big[\vec{e_1}(\cos\alpha - \cos\xi) + \\ &+ \vec{e_2}(\sin\alpha - \sin\xi + \epsilon\sin\alpha\cos\xi - \epsilon\cos\alpha\sin\xi)\Big].\end{aligned}$$

Anàlogament calculem $\overrightarrow{XC}$ i obtenim

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC} = \\ &= \frac{r_0^2(1+\epsilon)^2}{(1+\epsilon\cos\alpha)(1+\epsilon\cos\gamma)(1+\epsilon\cos\xi)}\cdot \\ &\cdot\Big[(\sin(\gamma-\alpha) + \sin(\xi-\gamma) + \sin(\alpha-\xi)\Big].\end{aligned}$$

Per la fórmula dels angles meitat

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC} = \\ &= \frac{-4r_0^2(1+\epsilon)^2 \sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\xi-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\xi}{2}}{(1+\epsilon\cos\alpha)(1+\epsilon\cos\gamma)(1+\epsilon\cos\xi)}.\end{aligned}$$

Ara, la raó doble és

$$\frac{(\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC})\,(\overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XD})}{(\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XD})\,(\overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XC})} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\delta-\alpha}{2}},$$

un cop simplificat el resultat.

Tal com hem dit abans, aquest resultat és vàlid per a totes les còniques sempre que, en el cas de la hipèrbola, s'interpretin correctament els angles focals.

# Tesis

- Miguel Àngel Barja Yañez va llegir la seva tesi, dirigida per Juan Carlos Naranjo, titulada *On the slope and geography of fibred surfaces and threefolds*, el dia 21 de desembre de 1998. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona.

En aquesta tesi s'estudien varietats fibrades sobre corbes; principalment els casos de les superfícies i 3-varietats fibrades. Al primer capítol, es donen resultats generals de pegaments de morfismes definits sobre la majoria de les fibres d'una aplicació. Al capítol segon, s'estudien desigualtats generals que verifiquen les varietats canòniques, és a dir, les varietats amb morfisme canònic birracional. Al capítol tres, es donen propietats de positivitat dels fibrats imatge directe de múltiples del fibrat dualitzant relatiu. Finalment, als capítols 4 i 5, es donen desigualtats entre els invariants numèrics de les varietats que apareixen als casos de superfícies i sòlids fibrats sobre corbes, respectivament. Aquestes desigualtats es donen en funció de l'anomenada pendent de la fibració, un concepte existent en el cas de les superfícies fibrades i que estenem al cas de les 3-varietats.